Calcul littéral – Identités remarquables

Dans toute la leçon, a et b désignent des nombres relatifs.

1. Développement par identités remarquables

carré d'une somme

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Exemple :

$C = (x + 3)^2$

$C = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$

$C = x^2 + 6x + 9$

carré d'une différence

$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Exemple :

$D = (x - 5)^2$

$D = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2$

$D = x^2 - 10x + 25$

Différence de 2 carrés

$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

Exemple :

$E = (x + 4)(x - 4)$

$E = x^2 - 4^2$

$E = x^2 - 16$

$2ab$ est appelé ***double produit*** de a par b

Pour calculer mentalement

$A = 101^2$

$A = (100 + 1)^2$

$A = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$

$A = 10\,000 + 200 + 1$

$A = 10\,201.$

$B = 99^2$

$B = (100 - 1)^2$

$B = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$

$B = 10\,000 - 200 + 1$

$B = 9\,801.$

$C = 101 \times 99$

$C = (100 + 1)(100 - 1)$

$C = 100^2 - 1^2$

$C = 10\,000 - 1$

$C = 9\,999.$

Remarque : Pour développer une expression, on commence par identifier ses différents produits.

Exemple :

$F = (5x + 2)(4x - 3) - (2x - 3)^2$

$F = 20x^2 - 15x + 8x - 6 - [4x^2 - 12x + 9]$

$F = 20x^2 - 7x - 6 - 4x^2 + 12x - 9$

$F = 16x^2 + 5x - 15$

2. Factorisation par identités remarquables

carré d'une somme

$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

Exemple :

$A = x^2 + 8x + 16$

$A = x^2 + 2 \times 4x + 4^2$

$A = (x + 4)^2$

carré d'une différence

$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$

Exemple :

$B = 4x^2 - 12x + 9$

$B = (2x)^2 - 2 \times 6x + 3^2$

$B = (2x - 3)^2$

Différence de 2 carrés

$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Exemple :

$C = 9x^2 - 25$

$C = (3x)^2 - 5^2$

$C = (3x + 5)(3x - 5)$

Autres cas par différence de 2 carrés

$D = (3x - 1)^2 - 64$

$D = (3x - 1)^2 - 8^2$

$D = [(3x - 1) + 8]\,[(3x - 1) - 8]$

$D = (3x + 7)(3x - 9)$

$E = (3x + 4)^2 - (8x - 5)^2$

$E = [(3x + 4) + (8x - 5)]\,[(3x + 4) - (8x - 5)]$

$E = [3x + 4 + 8x - 5]\,[3x + 4 - 8x + 5]$

$E = (11x - 1)(-5x + 9)$

3. Résoudre l'équation $x^2 = a$

Si $a < 0$ alors cette équation n'a pas de solution.

Soit l'équation $x^2 = a$ —— Si $a = 0$ alors cette équation a une solution $x = 0$.

Si $a > 0$ alors cette équation a deux solutions :
$x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

Exemples :

$x^2 = -5$	$x^2 = 0$	$x^2 = 7$	$5x^2 = 15$
$-5 < 0$	$x = 0$	$x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$	$x^2 = \frac{15}{5}$
$S = \varnothing$	$S = \{ 0 \}$	$S = \{\sqrt{7} ; -\sqrt{7} \}$	$x^2 = 3$
			$x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$
			$S = \{\sqrt{3} ; -\sqrt{3}\}$

Pour résoudre certaines équations plus complexes

Résoudre l'équation $(5x - 4)^2 - 9 = 0$

$$(5x-4)^2 - 9 = (5x-4)^2 - 3^2$$
$$= (5x - 4 + 3)(5x - 4 - 3)$$
$$= (5x - 1)(5x - 7)$$

Cela revient à résoudre l'équation $(5x - 1)(5x - 7) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul

Donc $5x - 1 = 0$ ou $5x - 7 = 0$

$5x = 1$ ou $5x = 7$

Donc $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{5}$